ПОИСК РАЗРЕЗА ГРАФА, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ В РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЛОГИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Ю.В. Поттосин[1], **С.А. Поттосина**[2]

[1]Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Сурганова 6, 220012 Минск, Беларусь pott@newman.bas-net.by
[2]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
П.Бровки 6, 220013 Минск, Беларусь s.pottosina@gmail.com

Согласно [1], для графа $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E и некоторых непересекающихся подмножеств A и B множества V разрезом называется множество ребер, одни концы которых лежат в A, другие — в B. Рассматривается задача нахождения максимального разреза в графе, ребра которого взвешены действительными числами, т. е. такого разреза, у которого сумма весов ребер максимальна.

Одной из важных задач логического проектирования является задача декомпозиции булевых функций. Рассмотрим эту задачу в следующей постановке [2]. Для системы полностью определенных булевых функций $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_l)$, $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$, требуется найти суперпозицию $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{w}, \mathbf{z_2})$, $\mathbf{w} = \mathbf{g}(\mathbf{z_1})$, где $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{z_2}$ — векторные переменные, компонентами которых служат соответственно переменные из подмножеств Z_1 и Z_2, образующих разбиение множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_l\}$. При этом число компонент векторной переменной $\mathbf{w}$ должно быть меньше, чем у переменной $\mathbf{z_1}$. К этому требованию добавим еще то, чтобы функции $\phi(\mathbf{w}, \mathbf{z_2})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{z_1})$ были как можно более простыми.

Табличный метод декомпозиции [3] предусматривает представление исходной системы булевых функций в виде двумерной таблицы M, столбцам которой соответствуют множества значений переменной $\mathbf{z_1}$, а строкам — множества значений переменной $\mathbf{z_2}$. Приписав различным столбцам таблицы M различные булевы векторы, получим функцию $\mathbf{w} = \mathbf{g}(\mathbf{z_1})$, значениями которой являются указанные векторы. Сложность функций $\phi(\mathbf{w}, \mathbf{z_2})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{z_1})$ сильно зависит от варианта такого кодирования.

В работе [4] предлагается метод кодирования столбцов таблицы M, целью которого является упрощение функций $\phi(\mathbf{w}, \mathbf{z_2})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{z_1})$. Метод представляет собой многошаговый процесс, на каждом i-м шаге которого вводится переменная w_i, являющаяся компонентой вектора $\mathbf{w}$, и определяются ее значения. Для этого строится полный граф $G = (V, E)$ и на парах различных столбцов таблицы M задается целочисленная функция h, значения которой определяются следующим образом. Если каждый столбец таблицы M рассматривать как булев вектор размерности sm, где s — число строк таблицы M, то расстояние по Хэммингу между i-м и j-м столбцами является значением функции h на данной паре столбцов. Вершинам графа G соответствуют столбцы таблицы M, а ребрам приписываются веса в виде соответствующих значений функции h.

На i-м шаге упомянутого процесса находится максимальный разрез графа G, представляемый парой подмножеств A, B множества V, и переменная w_i, получает значение 0 (или 1) для столбцов, соответствующих вершинам из A, и значение 1 (или 0) для столбцов, соответствующих вершинам из множества B. Для поиска разреза используется „жадный“ алгоритм из статьи [5]. Затем удаляются ребра, соединяющие вершины из A с вершинами из B, и выполняется следующий, $(j + 1)$-й шаг. Процесс заканчивается, когда граф G становится пустым. Использование функции h указанного вида способствует увеличению возможности склеивания элементарных конъюнкций в дизъюнктивных нормальных формах функций $\phi(\mathbf{w}, \mathbf{z_2})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{z_1})$.

Другой задачей, где может быть использован поиск максимального разреза, является задача кодирования состояний дискретного автомата. Одной из моделей поведения дискретного устройства является конечный автомат, который состоит из множества входных сигналов

A, множества выходных сигналов B, множества состояний Q и двух функций — функции выходов $\Phi(a, q) = b$ и функции переходов $\Psi(a, q) = q^+$, где $a \in A$, $b \in B$, $q, q^+ \in Q$ и q^+ является состоянием, в которое автомат переходит из состояния q при входном сигнале a.

В процессе синтеза логической схемы функции Φ и Ψ преобразуются в систему булевых функций посредством замены абстрактных символов a, b и q булевыми векторами. В функциональном описании синтезируемой схемы часто входы и выходы уже представлены в виде булевых векторов. Задача заключается в том, чтобы приписать абстрактным символам состояний q булевы векторы $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_k)$ в соответствии с некоторым критерием оптимизации. В этом случае любое состояние автомата будет представлено в схеме набором состояний двоичных элементов памяти (триггеров), где состояние i-го триггера представляет собой значение внутренней переменной z_i. Булев вектор $\mathbf{z}$, приписанный состоянию автомата, называется кодом состояния.

В случае синхронной реализации автомата при кодировании состояний обычно преследуется следующие цели: получение как можно более простой системы булевых функций, описывающей комбинационную часть проектируемого устройства [2], или уменьшение интенсивности переключений элементов памяти [6]. Последнее ведет к уменьшению потребляемой энергии проектируемой схемой. Предлагается следующий метод энергосберегающего кодирования состояний автомата, использующий поиск максимального разреза в графе.

Рассматриваются вероятности переходов между состояниями, и чем больше вероятность перехода для какой-то пары состояний, тем меньше должно быть по возможности компонент в кодах этих состояний, которые имеют различные значения, не важно, в каком направлении происходит переход. Значения внутренних переменных $z_1, z_2, ..., z_k$ определяются следующим образом.

Реализуется такой же многошаговый процесс, как в предыдущей задаче. Текущая ситуация в этом процессе характеризуется частичными кодами состояний $(z_1, z_2, ..., z_j)$, $j < k$, и взвешенным графом $G = (V, E)$, вершины которого соответствуют состояниям автомата. Две вершины этого графа связаны ребром, если и только если соответствующие состояния имеют один и тот же частичный код. Каждое ребро $\nu_s \nu_t \in E$ имеет вес $h_{st} = 1 - p^*_{st}$, где p^*_{st} — вероятность перехода между состояниями q_s и q_t, соответствующими вершинам ν_s и ν_t, независимо от направления перехода, т. е. $p^*_{st} = p_{st} + p_{ts}$, где p_{st} — вероятность перехода из состояния q_s в состояние q_t. На каждом шаге находится максимальный разрез, определяются значения очередной переменной z_i и удаляются ребра, принадлежащие разрезу. Процесс заканчивается, когда граф G оказывается пустым. Очевидно, для снижения переключательной активности элементов памяти, если вероятность p^*_{st} высока, то расстояние по Хэммингу между кодами состояний q_s и q_t должно быть сделано коротким. На последнем шаге ребрами связаны те вершины, соответствующие которым пары состояний связаны переходами с наибольшей вероятностью. Расстояния между их кодами равно единице.

Литература

1. Кристофидес Н. *Теория графов. Алгоритмический подход.* М.: Мир, 1978.

2. Закревский А. Д., Поттосин Ю. В., Черемисинова Л. Д. *Логические основы проектирования дискретных устройств.* М.: Физматлит, 2007.

3. Поттосин Ю. В., Шестаков Е. А. *Табличные методы декомпозиции систем полностью определенных булевых функций.* Минск: Белорус. наука, 2006.

4. Taghavi Afshord S., Pottosin Yu. V. *A new suboptimal decomposition algorithm based on the tabular method* // Танаевские чтения: доклады Шестой Международной научной конференции (27-28 марта 2014 г., Минск). Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2014. С. 161–165.

5. Закревский А. Д. *Раскраска графов при декомпозиции булевых функций.* Минск: ИТК НАН Беларуси, 2000. Вып. 5. С. 83–97.

6. Закревский А. Д. *Алгоритмы энергосберегающего кодирования состояний автомата* // Информатика. 2011. № 1(29). С. 68–78.